WYKŁAD PROF. DR HAB. INŻ. TADEUSZA KACZORKA

PT. „ROLA MACIERZY CYKLICZNYCH I NORMALNYCH W MODELOWANIU UKŁADÓW DYNAMICZNYCH"

1. Wprowadzenie

Tworząc model układu na podstawie danych wziętych z obserwacji lub eksperymentu otrzymujemy zwykle nie jeden, ale zbiór modeli. Pojawia się pytanie, który model z tego zbioru jest modelem reprezentatywnym, odzwierciedlającym prawidłowo własności dynamiczne obiektu rzeczywistego i powinien stanowić punkt wyjścia projektowania lub wyznaczania sterowania tego obiektu. Jakimi kryteriami należy się kierować przy wyborze modelu reprezentatywnego ze zbioru modeli. Pokażemy, że takimi kryteriami powinny być cykliczność macierzy A w opisie za pomocą równań stanu oraz normalność macierzy transmitancji operatorowych układu.

Jak wiadomo macierz kwadratową A nazywamy cykliczną, jeżeli jej wielomian charakterystyczny pokrywa się z wielomianem minimalnym [1]. Macierze cykliczne charakteryzują się strukturalną stabilnością, która odgrywa ważną rolę w modelowaniu i identyfikacji układów dynamicznych [7,8]. Każdą macierz transmitancji układu liniowego o m wejściach i p wyjściach można zawsze przedstawić w postaci standardowej

$$T(s) = \frac{P(s)}{d(s)}$$

przy czym P(s) jest macierzą wielomianową, a d(s) najmniejszym wspólnym mianownikiem.

Macierz transmitancji T(s) (oraz odpowiadający jej układ) nazywać będziemy normalną (normalnym) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej P(s) dzieli się bez reszty przez wielomian d(s). Klasa układów normalnych jest bardzo szeroka i odgrywa podstawową rolę w teorii układów dynamicznych [2, 4-8].

W pracy tej zostaną przedstawione:
- warunki konieczne i wystarczające cykliczności macierzy A oraz normalności macierzy transmitancji T(s);
- warunki istnienia i metody doboru sprzężeń zwrotnych od stanu tak, aby macierz A układu zamkniętego była macierzą cykliczną;
- warunki istnienia i metody doboru sprzężeń zwrotnych tak, aby macierz transmitancji układu zamkniętego była normalna

2. Preliminaria

Niech $R^{m\times n}$ będzie zbiorem macierzy o elementach z ciała liczb rzeczywistych o wymiarach $m\times n$ oraz $R^n := R^{n\times 1}$. Weźmy pod uwagę układ ciągły opisany równaniami

(1a) $$\dot{x} = Ax + Bu$$

(1b) $$y = Cx + Du$$

gdzie $x \in R^n$, $u \in R^m$ i $y \in R^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi oraz $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{p\times n}, D \in R^{p\times m}$.

Macierz transmitancji układu (1) ma postać

(2) $$T(s) = C[Is - A]^{-1}B + D$$

Macierz tę możemy napisać w postaci standardowej

(3) $$T(s) = \frac{P(s)}{d(s)}$$

przy czym $P(s) \in R^{p\times m}[s]$ ($R^{p\times m}[s]$ zbiór macierzy wielomianowych o wymiarach $p\times m$), a $d(s)$ jest najmniejszym wspólnym mianownikiem wszystkich elementów macierzy $T(s)$.

Korzystając z działań elementarnych na wierszach i kolumnach [1,3] możemy macierz $P(s) \in R^{p\times m}[s]$ sprowadzić do postaci kanonicznej Smitha

(4) $$P_S(s) = diag[i_1(s), i_2(s), \ldots, i_r(s), 0, \ldots, 0] \in R^{p\times m}[s]$$

gdzie $i_1(s), \ldots, i_r(s)$ są wielomianami inwariantnymi spełniającymi warunek podzielności $i_{k+1}(s) \mid i_k(s)$, $k = 1, \ldots, r-1$ ($i_{k+1}(s)$ jest podzielny bez reszty przez $i_k(s), k = 1, \ldots, r-1$), a $r =$ rząd $P(s)$. Wielomiany inwariantne można wyznaczyć z zależności [1]

(5) $$i_k(s) = \frac{D_k(s)}{D_{k-1}(s)} \quad (D_0(s) = 1),\ k = 1, \ldots, r$$

gdzie $D_k(s)$ jest największym wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów stopnia k macierzy $P(s)$.

Wielomian charakterystyczny $j(s) = \det[Is - A]$ macierzy A oraz jej wielomian minimalny $\Psi(s)$ są związane zależnością

(6) $$\Psi(s) = \frac{j(s)}{D_{n-1}(s)}$$

Z zależności (3)-(5) wynika, że $\Psi(s) = \mathrm{j}\ (s)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D_1(s) = D_2(s) = \cdots = D_{n-1}(s) = 1$$

Macierz A nazywamy cykliczną wtedy i tylko wtedy, gdy $\Psi(s) = \mathrm{j}\ (s)$.

Z zależności (5) wynika, że macierz A jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy

(7) $D_{n-1}(s) = 1$ lub równoważnie $i_1(s) = i_2(s) = \cdots$
$= i_{r-1}(s) = 1, i_r(s) = \Psi(s) = d(s)$

Definicja 1. Macierz $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$ nazywamy strukturalnie stabilną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba dodatnia e_0 taka, że dla dowolnej macierz $\mathbf{B} \in R^{n\times n}$ oraz liczby e spełniającej warunek $|\mathrm{e}| < \mathrm{e}_0$ wszystkie macierze $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathrm{e}$ są macierzami cyklicznymi.

Twierdzenie 1. Macierz cykliczna $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$ jest macierzą strukturalnie stabilną

Dowód tego twierdzenia jest podany w [8] i jest oparty na następujących dwóch faktach:

1. Jeżeli macierz $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$ jest nieosobliwa, to wszystkie macierze $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ są również nieosobliwe dla macierzy , której norma $\|\mathbf{B}\|$ spełnia warunek $\|\mathbf{B}\| < \mathrm{a}$ dla a będącego pewną liczbą dodatnią.
2. Jeżeli macierz $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$ ma $\mathrm{rzad}\,\mathbf{A} = r$, to $\mathrm{rzad}\,[\mathbf{A} + \mathbf{B}] \geq r$ dla macierzy $\mathbf{B} \in R^{n\times n}$ spełniającej powyższy warunek.

Macierze niecykliczne nie są strukturalnie stabilne, ale dla macierzy niecyklicznej $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$ można zawsze dobrać macierz $\mathbf{B} \in R^{n\times n}$ oraz liczbę małą e ($|\mathrm{e}| > 0$) takie, że suma $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathrm{e}$ jest macierzą cykliczną.

3. Normalność macierzy odwrotnej

Dla dowolnej macierzy A macierz odwrotną $[Is - A]^{-1}$ możemy napisać w postaci

(8) $$[Is - A]^{-1} = \frac{\overline{P}(s)}{\overline{d}(s)}$$

gdzie $\overline{P}(s) \in R^{n\times n}[s]$, $\overline{d}(s)$ jest najmniejszym wspólnym mianownikiem elementów macierzy $[Is - A]^{-1}$

Definicja 2. Macierz wymierną (8) nazywamy macierzą normalną, jeżeli każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej $\overline{P}(s)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $\overline{d}(s)$.

Twierdzenie 2. Niech $A \in R^{n\times n}$ i $n \geq 2$. Macierz odwrotna (8) jest macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest macierzą cykliczną.

Dowód tego twierdzenia jest podany w pracy [5, 6].

Łatwo wykazać, że [5] każda niediagonalna macierz $A \in R^{n\times n}$ dla n = 2 jest cykliczna.

Przykład 1. Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest cykliczna, gdyż

$$\mathrm{j}\ (s) = \det[Is - A] = \begin{vmatrix} s-2 & -1 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{vmatrix} = (s-2)^2(s-1)$$

oraz

$$[Is - A]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)(s-2)^2 \end{bmatrix}$$

Zatem $\Psi(s) = \mathrm{j}\ (s)$.
W tym przypadku

$$[Is - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s-2 & -1 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{P(s)}{\overline{d}(s)}$$

gdzie

$$\overline{d}(s) = (s-1)(s-2)^2,$$

$$P(s) = \begin{bmatrix} (s-1)(s-2) & s-1 & 0 \\ 0 & (s-1)(s-2) & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix}$$

Niezerowe minory stopnia drugiego macierzy $P(s)$

$$M_{11} = (s-1)(s-2)^3, M_{12} = (s-1)(s-2)^2,$$
$$M_{22} = (s-1)(s-2)^3, M_{33} = (s-1)^2(s-2)^2$$

dzielą się bez reszty przez $d(s)$.

Przykład 2. Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

nie jest macierzą cykliczną, gdyż

$$\mathrm{j}\ (s) = \det[Is - A] = \begin{vmatrix} s-2 & -1 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 \end{vmatrix} = (s-2)^3$$

oraz

$$[Is - A]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\Psi(s) = (s-2)^2 \text{ , gdyż } D_{n-1}(s) = s-2$$

oraz $\Psi(s) \neq j\ (s)$.

W tym przypadku

$$[Is-A]^{-1}=\begin{bmatrix} s-2 & --1 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{P(s)}{\bar{d}(s)}$$

gdzie

$$d(s)=(s-2)^2,\ P(s)=\begin{bmatrix} (s-2) & s-1 & 0 \\ 0 & (s-2) & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix}$$

Minor stopnia drugiego macierzy $P(s)$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{vmatrix}=s-2$$

nie dzieli się przez $d(s)$.

Twierdzenie 3. Macierz $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ spełniająca jeden z niżej podanych warunków

(9a) $a_{ij}\begin{cases} =0 & dla \quad j>i+1 \\ \neq 0 & dla \quad j=i+1 \end{cases} \qquad i,j=1,\ldots,n$

(9b) $a_{ij}\begin{cases} =0 & dla \quad i>j+1 \\ \neq 0 & dla \quad i=j+1 \end{cases} \qquad i,j=1,\ldots,n$

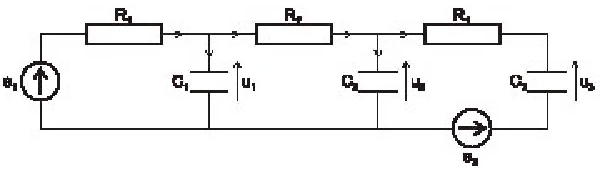
jest macierzą cykliczną.

Dowód tego twierdzenia jest podany w pracy [2].
Z twierdzenia 2 wynika natychmiast, że macierz Frobeniusa

$$A_F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & -a_{n1} \end{bmatrix}$$

jest macierzą cykliczną [1].

Przykład 3. Weźmy pod uwagę obwód elektryczny o schemacie podanym na rys.



Rys.

Przyjmując za zmienne stanu napięcie na kondensatorach u_1,u_2,u_3 otrzymamy równanie stanu o postaci

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{R_2+R_3}{R_2R_3C_2} & \frac{1}{R_3C_2} \\ 0 & \frac{1}{R_3C_3} & -\frac{1}{R_3C_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3C_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_3C_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku macierz A ma postać

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{R_2+R_3}{R_2R_3C_2} & \frac{1}{R_3C_2} \\ 0 & \frac{1}{R_3C_3} & -\frac{1}{R_3C_3} \end{bmatrix}$$

i spełnia warunki (9), a więc jest macierzą cykliczną dla dowolnych wartości rezystancji R_1,R_2,R_3 i pojemności C_1,C_2,C_3.

Zauważmy, że jeżeli obwód będzie miał strukturę taką, że każde oczko ma gałęzie wspólne conajwyżej z dwoma sąsiednimi oczkami, to możemy tak wybrać zmienne stanu, aby był spełniony warunek (9). w tym przypadku macierz A będzie macierzą cykliczną.

4. Normalność

Macierz transmitancji (2) układu (1) można zawsze napisać w postaci standardowej (3).

Jeżeli $m>p$ i rząd C = p, to r = rząd P(s) = p, a postać Smitha (4) macierzy $P(s)$ jest równa

(10) $P_S(s)=U(s)P(s)V(s)=$

$$=\begin{bmatrix} i_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i_2(s) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & i_p(s) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\in R^{p\times m}[s]$$

gdzie $U(s)\in R^{p\times p}[s]$ i $V(s)\in R^{m\times m}[s]$ są macierzami unimodularnymi działań elementarnych odpowiednio na wierszach i kolumnach.

Z zależności (10) i (4) wynika następująca postać kanoniczna McMillana macierzy $T(s)$ [3]

$$T_M(s)=\frac{P_S(s)}{d(s)}=\frac{U(s)P(s)V(s)}{d(s)}= \tag{11}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{n_1(s)}{q_1(s)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n_2(s)}{q_2(s)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & \frac{n_p(s)}{q_p(s)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in R^{p\times m}(s)$$

gdzie $\frac{i_k(s)}{d(s)}=\frac{n_k(s)}{q_k(s)}$ dla $k=1,\ldots,p(n_1(s)=i_1(s),$

$q_1(s)=d(s))$ $n_k(s)$ i $q_k(s)$ są względnie pierwszymi wielomianami takimi, że $n_k(s)|n_{k+1}(s)$ oraz $q_{k+1}(s)|q_k(s), k=1,\ldots,p-1$, a $R^{p\times m}(s)$ jest zbiorem macierzy wymiernych o wymiarach $p\times m$.

Wielomian

(12) $q(s)=q_1(s)q_2(s)\ldots q_p(s)$

nazywamy wielomianem McMillana macierzy $T(s)$.

Z zależności (11)-(12) wynika, że $\deg q(s)\geq \deg d(s)$ (deg. oznacza stopień) oraz

(13) $q(s)=d(s)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$q_k(s)=1$ dla $k=2,\ldots,p$ i $q_1(s)=d(s)$

Twierdzenie 4. Niech $\min(m,p)\geq 2$ oraz $T(s)$ ma postać (3). Macierz $T(s)$ jest macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy $q(s)=d(s)$.

Dowód tego twierdzenie jest podany w [2,5].

Przykład 4. Pisząc macierz transmitancji

$$T(s)=\frac{1}{2s+1}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -s & 2s+1 & s^2-s \end{bmatrix} \tag{14}$$

w postaci (3) otrzymamy $d(s)=2s+1$ oraz

$$P(s)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -s & 2s+1 & s^2-s \end{bmatrix} \tag{15}$$

Postać kanoniczna Smitha macierzy (15) jest równa

$$P_S(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2s+1 & 0 \end{bmatrix}$$

a postać McMillana macierzy (14)

$$T_M(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku $q(s)=d(s)=2s+1$

Łatwo sprawdzić, że minory

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -s & 2s+1 \end{vmatrix}=2(2s+1),$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -s & s^2-s \end{vmatrix}=2s^2+s,$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2s+1 & s^2-s \end{vmatrix}=-3(2s+1)$$

dzielą się bez reszty przez $d(s)$. Macierz (14) jest więc macierzą normalną.

Przykład 5. Pisząc macierz transmitancji

$$T(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \tag{16}$$

w postaci (3) otrzymamy $d=(s+1)^2$ oraz

$$P(s)=\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Postać Smitha macierzy (17) jest równa

$$P_S(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a postać McMillana macierzy (16)

$$T_M(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku $q(s)=(s+1)^3\neq d(s)=(s+1)^2$.

Minor $\begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ macierzy (17)

nie dzieli się bez reszty przez $d(s)$. Macierz (16) nie jest więc macierzą normalną.

W pracy [2] podano nietrywialne przykłady obwodów normalnych i nienormalnych oraz wykazano, że ten sam obwód dla pewnych wartości parametrów (rezystancji i pojemności) jest obwodem normalnym, a dla innych wartości tych parametrów nie jest obwodem normalnym.

5. Wpływ sprzężenia zwrotnego na cykliczność i normalność macierzy

Weźmy pod uwagę standardowy układ (1) ze sprzężeniem zwrotnym od wektora stanu o postaci

(18) $$u = v + Kx$$

gdzie $v \in R^m$ i $K \in R^{m \times n}$ jest macierzą wzmocnień. Podstawiając (18) do (1a) otrzymamy

(19) $$\dot{x} = (A + BK)x + Bv$$

Macierz transmitancji układu zamkniętego ma postać

(20) $$T_c(s) = C[I_n s - (A + BK)]^{-1} B$$

Zadanie normalizacji macierzy transmitancji za pomocą sprzężeń zwrotnych od wektora stanu można sformułować następująco. Dany jest układ standardowy (1) z macierzą A niecykliczą i parą (A,C) nieobserwowalną. Należy wyznaczyć macierz K tak, aby macierz transmitancji układu zamkniętego (20) była normalna.

Twierdzenie 5. Niech rząd układu $n > 2$. Jeżeli para (A, b) układu o jednym wejściu $(m = 1)$ jest sterowalna, to istnieje macierz sprzężeń zwrotnych k od wektora stanu taka, że macierz układu zamkniętego $A_z = A + bk$ jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest również cykliczna. Jeżeli para (A,B) układu o wielu wejściach ($m > 1$) jest sterowalna i macierz A nie jest cykliczna, to istnieje macierz sprzężeń zwrotnych K od wektora stanu taka, że macierz układu zamkniętego $A_z = A + BK$ jest cykliczna.

Twierdzenie 6. Niech macierz A układu (1) będzie niecykliczna i para (A,C) nieobserwowalna. Wtedy istnieje macierz K taka, że macierz transmitancji (20) jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy para (A,B) jest sterowalna.

Dowód tego twierdzenia i procedura wyznaczania macierzy K są podane w pracy [4].

6. Wnioski i problemy otwarte

W pracy tej podkreślono rolę macierzy cyklicznych i normalnych w modelowaniu układów dynamicznych. W pracy wykazano, że:

– każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej P(s), będącej licznikiem macierzy odwrotnej (8), dzieli się bez reszty przez wielomian d(s) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny jest równy wielomianowi minimalnemu macierzy A;
– każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej P(s), będącej licznikiem macierzy transmitancji (3) dzieli się bez reszty przez wielomian d(s) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian d(s) jest równy wielomianowi McMillana macierzy T(s);
– jeżeli para (A,b) układu o jednym wejściu jest sterowalna, to istnieje macierz sprzężeń zwrotnych od stanu taka, że macierz układu zamkniętego jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy A jest również cykliczna;
– jeżeli para (A,B) układu o wielu wejściach jest sterowalna i macierz A nie jest cykliczna, to istnieje macierz sprzężeń zwrotnych taka, że macierz układu zamkniętego jest cykliczna.

Problemem otwartym jest uogólnienie tych rozważań na układy dwuwymiarowe oraz układy z opóźnieniami.

LITERATURA

[1] T. Kaczorek, Wektory i Macierze w Automatyce i Elektrotechnice, WNT Warszawa, 1998.
[2] T. Kaczorek, Podzielność w obwodach elektrycznych minorów stopnia drugiego macierzy licznika, macierzy transmitancji przez jej mianownik, Przegląd Elektrotechniczny, 12, 2001, str. 297-302.
[3] T. Kaczorek, Teoria Sterowania i Systemów, PWN Warszawa 1999.
[4] T. Kaczorek, Normalization of transfer matrix of linear systems by feedbacks, Control and Cybernetics, No 1, vol. 31, 2002, str. 67-78.
[5] T. Kaczorek, Influence of state-feedback on cyclicity of linear systems, Konf. Naukowo-Techniczna, Automation 2002, Warszawa, 20-22 marca 2002, str. 81-93.
[6] T. Kaczorek, Divisibility of second order minors of cyclic matrices and transfer matrices of linear systems, Konferencja „Zastosowanie Komputerów w Elektrotechnice", Kiekrz, 22-24.04.2002, str. 11-14.
[7] B. Lampe and E. Rosenwasser, Algebraic properties of irreducible transfer matrices, Avtomatika i Telemekhanika, N 7, 2000, pp. 31-43 (po rosyjsku) (Angielskie tłumaczenie: Automation and Remote Control, vol. 61, N 7, Pt. I, 2000, str. 1091-1102
[8] E. N. Rosenwasser and B. P. Lampe, Algebraische Methoden zur Theorie der Mehrgrőβen – Abtastsysteme, Universität Rostock, 2000.